FUNKSIYANING HOSILASI VA UNING AMALIY TATBIQLARI

Yuldasheva Aziza Azamat qizi
Xalqaro Nordik universiteti magistranti, e-mail: yuldashevaaziza993@gmail.com
Ashuraliyeva Saida Saibjanovna
Xalqaro Nordik universiteti magistranti, e-mail: infosaida21@gmail.com

Annotatsiya. Tezisda funksiya hosilasining ta’rifi, geometrik va fizik ma’nosi qisqacha bayon etilib, uning fizika, iqtisodiyot, farmakologiya va demografiyadagi tatbiqlari ko‘rib chiqilgan. Statistika agentligining 2021–2026-yillardagi rasmiy ma’lumotlari asosida O‘zbekiston doimiy aholisining o‘sish tezligi chekli ayirmalar usulida hisoblangan. Birinchi hosila butun davrda musbat, ikkinchi hosila esa 2024-yildan manfiy ekani aniqlangan; bu aholi o‘sish sur’atining sekinlashayotganini ko‘rsatadi.
Kalit so‘zlar: hosila, o‘zgarish tezligi, chekli ayirmalar, ikkinchi hosila, chiziqli yaqinlashish, aholi dinamikasi, eksponensial model.
Аннотация. В тезисе кратко изложены определение производной функции, её геометрический и физический смысл, рассмотрены её приложения в физике, экономике, фармакологии и демографии. На основе официальных данных Агентства статистики за 2021–2026 гг. методом конечных разностей вычислена скорость роста постоянного населения Узбекистана. Установлено, что первая производная положительна на всём периоде, а вторая с 2024 г. отрицательна, что указывает на замедление темпов роста.
Ключевые слова: производная, скорость изменения, конечные разности, вторая производная, линейная аппроксимация, динамика населения, экспоненциальная модель.
Abstract. The paper outlines the definition of the derivative of a function and its geometric and physical meaning, and considers its applications in physics, economics, pharmacology and demography. Using official data of the Statistics Agency for 2021–2026, the growth rate of the permanent population of Uzbekistan is calculated by the finite difference method. The first derivative is positive over the whole period, while the second derivative has been negative since 2024, indicating a slowdown in population growth.
Keywords: derivative, rate of change, finite differences, second derivative, linear approximation, population dynamics, exponential model.

Kirish. Tabiat va jamiyatdagi ko‘pchilik jarayonlarni bir kattalikning boshqasiga bog‘liq holda o‘zgarishi sifatida tasvirlash mumkin: jism bosib o‘tgan yo‘l vaqtga, mahsulot tannarxi ishlab chiqarish hajmiga, qondagi dori konsentratsiyasi qabul qilingandan keyin o‘tgan muddatga, mamlakat aholisi esa yillarga bog‘liq. Bunday bog‘lanishlarda kattalikning o‘zidan tashqari uning qanchalik tez o‘zgarayotgani ham muhim ahamiyatga ega. Aynan shu tezlikni o‘lchash vositasi funksiyaning hosilasi bo‘lib, u XVII asr oxirida I. Nyuton va G. Leybnits ishlarida shakllangan va bugungi kunda muhandislik, iqtisodiyot, biologiya va tibbiyotdagi miqdoriy tahlilning asosiy apparatiga aylangan [3; 4].

Mavzuning O‘zbekiston uchun dolzarbligi ikki jihatdan ko‘rinadi. Birinchidan, O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son qarorida matematika 2020-yilda ilm-fanni rivojlantirishning ustuvor yo‘nalishlaridan biri etib belgilangan va matematika ta’limi sifatini oshirish vazifasi qo‘yilgan [1]. Ikkinchidan, O‘zbekiston birinchi marta qatnashgan PISA 2022 tadqiqotida 15 yoshli o‘quvchilar matematik savodxonlik bo‘yicha 364 ball to‘plagan,

OECD mamlakatlarining o‘rtacha natijasi esa 472 ballni tashkil etgan [2]. PISA aynan bilimni real vaziyatda qo‘llash qobiliyatini o‘lchashini hisobga olsak, hosila kabi tushunchalarni quruq formula sifatida emas, balki haqiqiy ma’lumotlar ustida ko‘rsatish zarurati ortadi. Tadqiqotning maqsadi — hosilaning asosiy amaliy tatbiqlarini tizimlashtirish va ularni O‘zbekiston rasmiy statistik ma’lumotlari asosidagi hisob-kitob bilan ko‘rsatib berishdan iborat.

Materiallar va metodlar. Nazariy asos sifatida matematik analizning klassik manbalari [3; 4] va sonli usullar bo‘yicha qo‘llanma [5] olindi. Empirik material — Statistika agentligi (hozirgi Milliy statistika qo‘mitasi) e’lon qilgan doimiy aholi sonining 2021–2026-yillar 1-yanvar holatidagi qiymatlari [6–8], 2025-yil 1-iyul holatidagi ko‘rsatkich [9] hamda tug‘ilishlar soni haqidagi ma’lumotlar [7; 10]. Aholi soni uzluksiz funksiya ko‘rinishida emas, yillik qiymatlar jadvali sifatida berilgani uchun hosila chekli ayirmalar orqali taqribiy hisoblandi: ichki nuqtalarda markaziy ayirma, chegaraviy nuqtada orqa ayirma qo‘llandi [5]. Qadam h = 1 yil bo‘lganda:

$$P'(t_i)\approx\frac{P(t_{i+1})-P(t_{i-1})}{2h},\ P''(t_i)\approx\frac{P(t_{i+1})-2P(t_i)+P(t_{i-1})}{h^2} \qquad (1)$$

Bundan tashqari, aholi o‘sishi eksponensial model bilan yaqinlashtirildi, chiziqli yaqinlashish formulasi bo‘yicha olingan baho rasmiy 2025-yil 1-iyul ko‘rsatkichi bilan solishtirildi. Hisob-kitoblar Python tilida bajarildi.

Natijalar. $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deb funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatining, argument orttirmasi nolga intilgandagi limitiga aytiladi [3; 4]:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (2)$$

Geometrik nuqtai nazardan $f'(x_0)$ — funksiya grafigiga $(x_0; f(x_0))$ nuqtada o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti, fizik nuqtai nazardan esa jarayonning oniy tezligi. Agar $s(t)$ harakat qonuni bo‘lsa, tezlik $v(t) = s'(t)$, tezlanish esa $a(t) = v'(t) = s''(t)$. Hosilaning barcha amaliy qo‘llanishlari shu ikki ma’nodan kelib chiqadi: birinchi hosila ishorasi funksiyaning o‘sishi yoki kamayishini, uning nolga tengligi ekstremum nuqtalarini, ikkinchi hosila ishorasi esa o‘sishning tezlashayotgani yoki sekinlashayotganini bildiradi.

Iqtisodiyotda $C(q)$ xarajat funksiyasining hosilasi chegaraviy xarajat $MC(q) = C'(q)$ deb ataladi va qo‘shimcha bir birlik mahsulotning taxminiy xarajatini ko‘rsatadi; foyda $\Pi(q) = R(q) - C(q)$ ning maksimumi $R'(q) = C'(q)$ shartidan topiladi [3]. Farmakologiyada birinchi tartibli kinetikaga bo‘ysunuvchi dori moddasi uchun konsentratsiya $C(t) = C_0 \cdot e^{-kt}$ ko‘rinishida kamayadi, uning hosilasi $C'(t) = -k \cdot C(t)$ esa chiqarilish tezligi konsentratsiyaga proporsional ekanini va yarim chiqarilish davri $T_{1/2} = \ln 2/k$ ekanini bildiradi. Muhandislikda hosila optimallashtirish masalalarida — berilgan material sarfi bilan eng katta hajmli idish yasash, energiya sarfi eng kam bo‘lgan rejimni tanlashda qo‘llanadi.

Optimallashtirishning klassik namunasi sifatida tomoni a bo‘lgan kvadrat tunuka varaqning burchaklaridan tomoni x bo‘lgan kvadratlar kesib olinib, ochiq quti yasaladi deylik. Qutining hajmi va uning hosilasi:

$$V(x)=x(a-2x)^2,\ V'(x)=(a-2x)(a-6x) \qquad (5)$$

$V'(x) = 0$ shartidan $x = a/6$ kelib chiqadi; bu nuqtada hosila ishorasi plyusdan minusga o‘zgargani uchun hajm eng katta bo‘ladi: $V_{max} = 2a^3/27$. Masalan, a = 60 sm bo‘lganda kesiladigan kvadrat tomoni 10 sm, qutining eng katta hajmi esa 16 000 sm³, ya’ni 16 litr bo‘ladi.

1-jadvalda O‘zbekiston doimiy aholisi sonining rasmiy qiymatlari va ulardan (1) formula bo‘yicha hisoblangan birinchi va ikkinchi hosila baholari keltirilgan.

1-jadval. O‘zbekiston doimiy aholisi soni va uning hosilalari bahosi (1-yanvar holatiga)

Yil	Aholi soni P(t), ming kishi	Yillik o‘zgarish ΔP, ming kishi	Nisbiy o‘sish, %	P′(t), ming kishi/yil	P″(t), ming kishi/yil²
2021	34 558,9	–	–	–	–
2022	35 271,3	712,4	2,06	733,0	41,2
2023	36 024,9	753,6	2,14	764,3	21,3
2024	36 799,8	774,9	2,15	759,2	−31,5
2025	37 543,2	743,4	2,02	718,5	−49,9
2026	38 236,7	693,5	1,85	–	–

Manba: [6–8] ma’lumotlari asosida muallif hisob-kitobi.

Jadvaldan ko‘rinadiki, butun davr mobaynida $P'(t) > 0$, ya’ni aholi soni monoton o‘smoqda: besh yil ichida u 3 677,8 ming kishiga ko‘paygan, o‘rtacha o‘sish 735,6 ming kishi/yilni tashkil etadi. O‘sish tezligi 2023-yilda eng yuqori qiymatga (764,3 ming kishi/yil) yetgan, so‘ngra pasaygan va 2025-yilda 718,5 ming kishi/yilga tushgan. Ikkinchi hosila bahosi 2022–2023-yillarda musbat (41,2 va 21,3), 2024-yildan esa manfiy (−31,5 va −49,9). Demak, 2023–2024-yillar oralig‘ida $P(t)$ funksiyaning burilish nuqtasi joylashgan: aholi o‘sishda davom etmoqda, biroq o‘sish tezlashuvdan sekinlashuvga o‘tgan. Bu natija mustaqil demografik ko‘rsatkich bilan ham tasdiqlanadi: tug‘ilganlar soni 2023-yildagi 962,0 ming kishidan 2024-yilda 926,4 ming kishiga, ya’ni 35,6 ming kishiga (3,7 %) kamaygan [7; 10].

2023-yil uchun topilgan 764,3 ming kishi/yil tezlikni kunlarga o‘tkazsak, 764,3 : 365 ≈ 2,1 ming kishi/kun hosil bo‘ladi. Statistika agentligi ham 2023-yil 1-oktabr holatiga ko‘ra aholi har kuni o‘rtacha 2,1 ming kishiga oshayotganini qayd etgan [11].

Butun davr uchun o‘rtacha uzluksiz o‘sish sur’ati quyidagicha topildi:

$$r = \frac{\ln \frac{P(2026)}{P(2021)}}{5} = \frac{\ln \frac{38\,236{,}7}{34\,558{,}9}}{5} \approx 0{,}0202 \qquad (3)$$

Bu $P(t) = P_0 \cdot e^{rt}$ modelga va $P'(t) = r \cdot P(t)$ differensial tenglamaga mos keladi, ya’ni o‘sish tezligi aholi soniga proporsional. Shu sur’at saqlansa, aholi soni taxminan $\ln 2 / r \approx 34$ yilda ikki baravar ortgan bo‘lardi. Biroq ikkinchi hosilaning manfiyligi r ning o‘zi kamayayotganini ko‘rsatadi: nisbiy o‘sish 2,15 % dan 1,85 % gacha pasaygan.

Hosilaga asoslangan baholashning aniqligini tekshirish uchun 2025-yil 1-iyuldagi aholi soni chiziqli yaqinlashish formulasi bilan hisoblandi:

$$P(t_0 + \Delta t) \approx P(t_0) + P'(t_0) \cdot \Delta t = 37\,543{,}2 + 718{,}5 \cdot 0{,}5 \approx 37\,902{,}5 \qquad (4)$$

Rasmiy ko‘rsatkich 37 859,7 ming kishi [9]; farq 42,8 ming kishi yoki 0,11 %. Eksponensial model shu sana uchun 37 924,8 ming kishi (xato 65,1 ming kishi, 0,17 %) beradi. Demak, bitta nuqtadagi hosilaga tayangan oddiy formula qisqa muddatli baholashda murakkabroq modeldan qolishmaydi, aksincha, aniqroq natija beradi. Shu usul bilan, orqa ayirma (693,5 ming kishi/yil) asosida, 2026-yil 1-iyul uchun taxminiy baho 38 583,5 ming kishini tashkil etadi.

Xulosa. O‘tkazilgan nazariy tahlil va rasmiy statistik ma’lumotlar ustidagi hisob-kitoblar asosida quyidagi xulosalarga kelindi.

1. Hosila bir kattalikning boshqasiga nisbatan o‘zgarish tezligining universal o‘lchovidir. Uning geometrik (urinma qiyaligi) va fizik (oniy tezlik) ma’nolari fizika, iqtisodiyot (chegaraviy xarajat, foyda maksimumi), farmakologiya (dori chiqarilish tezligi, yarim chiqarilish davri) va muhandislikdagi (optimallashtirish) tatbiqlarning yagona asosi bo‘lib xizmat qiladi.
2. Ma’lumotlar formula ko‘rinishida emas, jadval shaklida berilgan hollarda ham hosilani chekli ayirmalar yordamida ishonchli baholash mumkin. Ichki nuqtalarda markaziy ayirma bir tomonlama ayirmaga nisbatan aniqroq natija beradi.
3. Rasmiy ma’lumotlarga ko‘ra, 2021–2026-yillarda O‘zbekiston doimiy aholisi 34 558,9 ming kishidan 38 236,7 ming kishiga yetgan. Birinchi hosila butun davrda musbat bo‘lib, o‘rtacha 735,6 ming kishi/yilni tashkil etadi. Boshqa o‘lchov birligida bu har kuni o‘rtacha 2 ming kishidan ortiq o‘sish demakdir va rasmiy manbalarda qayd etilgan kunlik ko‘rsatkichga mos keladi [11].
4. Ikkinchi hosila bahosi 2024-yildan manfiy qiymat olgan, nisbiy o‘sish sur’ati esa 2,15 % dan 1,85 % gacha pasaygan. Bu aholi o‘sishining sekinlashuv bosqichiga o‘tganini ko‘rsatadi va tug‘ilishlar sonining 3,7 % ga qisqarishi bilan mos keladi. Bu xulosa aholi sonining o‘zidan emas, ikkinchi hosila tahlilidan kelib chiqadi.
5. Chiziqli yaqinlashish formulasi 2025-yil 1-iyul uchun 0,11 % xato bilan natija berdi va eksponensial modeldan (0,17 %) aniqroq chiqdi. Demak, hosila qisqa muddatli rejalashtirishda — maktab o‘rinlari, poliklinika quvvati, ish o‘rinlariga bo‘lgan ehtiyojni oldindan baholashda — sodda va ishonchli vosita bo‘la oladi.
6. Uzoq muddatli prognozlarda doimiy sur’atli eksponensial model aholi sonini oshirib ko‘rsatishi mumkin, chunki ikkinchi hosila manfiyligi o‘sish sur’atining pasayayotganini bildiradi. Shu sababli bunday prognozlarda o‘zgaruvchan sur’atli yoki logistik modellarni qo‘llash va ularning parametrlarini har yili yangi statistik ma’lumotlar bilan qayta baholash tavsiya etiladi.
7. PISA 2022 natijalari [2] o‘quvchilarning matematik bilimni real vaziyatga qo‘llash ko‘nikmasi zaifligini ko‘rsatgan. Shuning uchun maktab va oliy ta’limda hosila mavzusini o‘qitishda rasmiy statistik ma’lumotlar (aholi soni, narxlar, tibbiy ko‘rsatkichlar) asosidagi topshiriqlardan foydalanish tavsiya etiladi; ushbu tezisdagi 1-jadval shunday topshiriq uchun tayyor material bo‘la oladi. Bu yondashuv PQ-4708-son qarorda [1] belgilangan matematika ta’limi sifatini oshirish vazifasiga bevosita xizmat qiladi.
8. Taklif etilgan usulni hududlar kesimidagi aholi dinamikasiga, narxlar indeksiga va klinik-laboratoriya ko‘rsatkichlarining vaqt bo‘yicha o‘zgarishini kuzatishga ham qo‘llash mumkin.

Adabiyotlar

1. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarori. URL: https://lex.uz/docs/4807552
2. OECD. PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education. Paris: OECD Publishing, 2023. DOI: 10.1787/53f23881-en
3. Stewart J. Calculus: Early Transcendentals. 8th ed. Boston: Cengage Learning, 2016. ISBN 978-1-285-74155-0.
4. Fikhtengolts G.M. Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya. T. 1. 8-e izd. M.: Fizmatlit, 2003. 680 s.

5. Burden R.L., Faires J.D. Numerical Analysis. 9th ed. Boston: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011. ISBN 978-0-538-73351-9.
6. Statistika agentligi. O‘zbekiston Respublikasining demografik holati: 2023-yil yanvar–dekabr (dastlabki ma’lumotlar). URL: https://www.stat.uz/img/demografiya-press-reliz-26_01_2024-uzb.pdf
7. Statistika agentligi. O‘zbekiston Respublikasining demografik holati: 2024-yil yanvar–dekabr (dastlabki ma’lumotlar). URL: https://stat.uz/img/infografikalar/demografiya_uzb_p46235.pdf
8. Milliy statistika qo‘mitasi. 2026-yil 1-yanvar holatiga O‘zbekistonning doimiy aholisi soni. URL: https://stat.uz/uz/matbuot-markazi/qo-mita-yangiliklar/66702-
9. Milliy statistika qo‘mitasi. Doimiy aholi soni (2025-yil 1-iyul holatiga). URL: https://stat.uz/uz/21-home-indicators/23-population
10. Statistika agentligi 2024-yildagi demografik holatga doir ma’lumotlarni e’lon qildi. Daryo.uz, 2025. URL: https://daryo.uz/ndCAqDpt
11. O‘zbekistonda doimiy aholi soni har kuni qanchaga ko‘payayotgani ma’lum qilindi. Afisha.uz, 2023-yil 27-oktabr. URL: https://www.afisha.uz/uz/gorod/2023/10/27/aholi